Jochen Weber

Aufgaben zum Kreiskegel

1.0 Ein gleichseitiges Dreieck (Seitenlänge 6,5 cm) rotiert um eine Symmetrieachse.

1.1 Berechnen Sie das Volumen und die Oberfläche des entstehenden Kegels.

1.2 Ermitteln Sie den Mittelpunktswinkel des Kreissektor, wenn man den Mantel in der Ebene abwickelt.

2 Ein Viertelkreis mit dem Radius 12 cm ist die Mantelfläche eines Kegels. Berechnen Sie das Volumen des Kegels.

3.0 Der Diagonalenschnittpunkt der Deckfläche eines Würfels mit 8 cm Kantenlänge ist Spitze eines einbeschriebenen Kegels, dessen Grundkreis der Inkreis der Grundfläche ist.

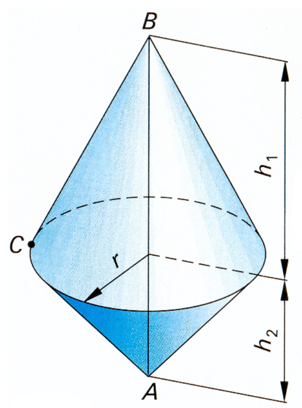
3.1 Bestimmen Sie, um wie viel Prozent das Volumen des Kegels kleiner als das Volumen des Würfels ist.

3.2 Bestimmen Sie, um wie viel Prozent die Oberfläche des Kegels kleiner als die Oberfläche des Würfels ist.

4.0 Ein Dreieck ABC mit $\left|\overline{AB}\right| = 12\text{cm}$, $\left|\overline{AC}\right| = 6\text{cm}$ und h_c = 5 cm rotiert um die Achse AB. Der entstehende Körper setzt sich aus zwei Kegeln zusammen (Doppelkegel) (siehe auch nachfolgende Figur).

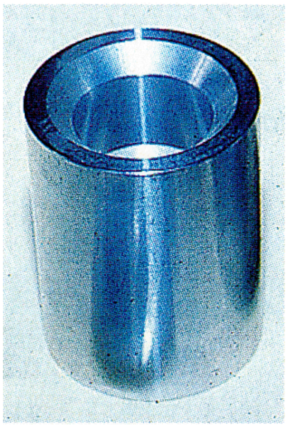
4.1 Zeichnen Sie einen Axialschnitt des Doppelkegels.

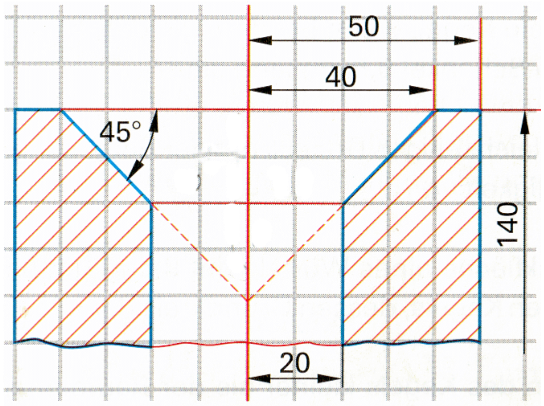
4.2 Berechnen Sie das Volumen und die Oberfläche des Rotationskörpers.



Jochen Weber

5 Der Körper von folgendem Bild hat die in der Skizze dargestellte Schnittdarstellung. Berechnen Sie das Volumen mit den angegebenen Maßen (Maßangaben in mm).





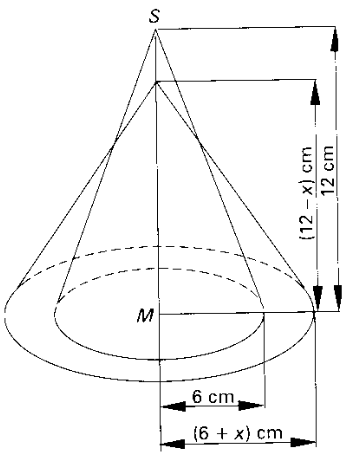
6.0 Man erhält neue Kegel, wenn man bei einem 8 cm hohen Kegel mit einer 12 cm langen Mantellinie diese um x cm verlängert und gleichzeitig die Höhe um x cm verkürzt ($0 < x < 8$).

6.1 Stellen Sie das Volumen V(x) der Kegel in Abhängigkeit von x dar.

6.2 Bestimmen Sie x so, dass das Volumen des Kegels maximal ist.

6.3 Berechnen Sie Volumen und Oberfläche des Kegels mit maximalem Rauminhalt.

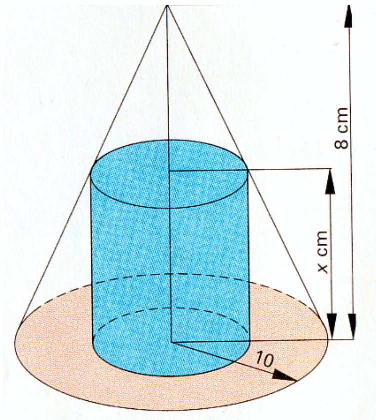
7 Wenn man bei einem 12 cm hohen Kegel mit dem Grundkreisradius 6 cm die Höhe um x cm verkürzt ($0 < x < 12$) und gleichzeitig den Grundkreisradius um x cm verlängert, so erhält man neue Kegel (siehe folgende Figur).
Stellen Sie das Volumen V(x) der Kegel in Abhängigkeit von x dar.



8.0 Einem Kegel mit dem Grundkreisradius 10 cm und der Höhe 8 cm werden Zylinder mit der Höhe x einbeschrieben (siehe auch folgendes Bild).

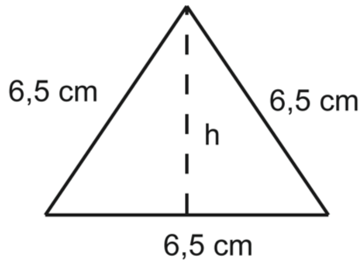
8.1 Bestimmen Sie den Radius r(x) des Grundkreises der Zylinder in Abhängigkeit von x.

8.2 Bestimmen Sie durch Rechnung die Belegung von x, für die man den einbeschriebenen Zylinder mit der größten Mantelfläche erhält.



Lösungen

1.1 Axialschnitt:



$$V=\frac{1}{3}\cdot r^2\cdot\pi\cdot h=\frac{1}{3}\cdot(3{,}25)^2\cdot\pi\cdot h$$

$$h^2+(3{,}25)^2=(6{,}5)^2 \quad \Rightarrow h^2=(6{,}5)^2-(3{,}25)^2=31{,}6875 \quad \Rightarrow h=5{,}63\,\text{cm}$$

$$\Rightarrow V=\frac{1}{3}\cdot(3{,}25)^2\cdot\pi\cdot 5{,}63=62{,}27\,\text{cm}^3$$

$$O=r^2\cdot\pi+r\cdot\pi\cdot m=3{,}25^2\cdot\pi+3{,}25\cdot\pi\cdot 6{,}5=99{,}55\,\text{cm}^2$$

1.2

$$A_{\text{Kreissektor}}=\frac{m^2\cdot\pi\cdot\varphi}{360^\circ}=66{,}37\,\text{cm}^2 \quad \Rightarrow m^2\cdot\pi\cdot\varphi=66{,}37\cdot 360^\circ$$

$$\Rightarrow \varphi=\frac{66{,}37\cdot 360^\circ}{m^2\cdot\pi}=\frac{66{,}37\cdot 360^\circ}{6{,}5^2\cdot\pi}=180^\circ$$

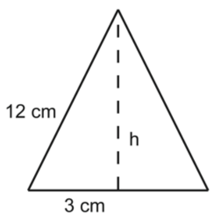
2

$$A_M=\frac{m^2\cdot\pi\cdot\varphi}{360^\circ}=\frac{12^2\cdot\pi\cdot 90^\circ}{360^\circ}=113{,}09\,\text{cm}^2$$

Berechnung des Grundkreisradius:

$$\pi\cdot r\cdot m=113.09 \quad \Rightarrow r=\frac{113{,}09}{\pi\cdot m}=\frac{113{,}09}{\pi\cdot 12}=3$$

Berechnung der Höhe des Kegels:

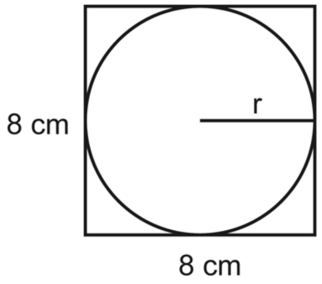


$$h^2+3^2=12^2 \quad \Rightarrow h^2=12^2-3^2=135 \quad \Rightarrow h=11{,}62\,\text{cm}$$

$$\Rightarrow V_{\text{Kegel}}=\frac{1}{3}\cdot r^2\cdot\pi\cdot h=\frac{1}{3}\cdot 3^2\cdot\pi\cdot 11{,}62=109{,}51\,\text{cm}^3$$

Jochen Weber

3 Skizze der Grundfläche:



$V_{\text{Würfel}} = 8^3 = 512\,\text{cm}^3$

$V_{\text{Kegel}} = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 4^2 \cdot \pi \cdot 8 = 134{,}04\,\text{cm}^3$

$512\,\text{cm}^3 \quad 100\%$

$134{,}04\,\text{cm}^3 \quad x\% \qquad x = \frac{134{,}04 \cdot 100}{512} = 26{,}18\%$

Das Kegelvolumen ist um 100%-26,18%=73,82% kleiner als das Würfelvolumen

$O_{\text{Würfel}} = 6 \cdot 8 \cdot 8 = 384\,\text{cm}^2$

$O_{\text{Kegel}} = r^2 \cdot \pi + r \cdot \pi \cdot m$

Berechnung von m:

$m^2 = r^2 + h^2 = 4^2 + 8^2 = 80 \quad \Rightarrow m = 8{,}94\,\text{cm}$

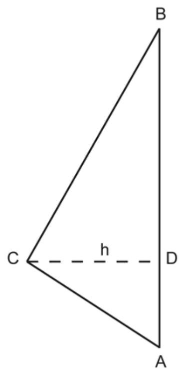
$O_{\text{Kegel}} = 4^2 \cdot \pi + 4 \cdot \pi \cdot 8{,}94 = 162{,}61\,\text{cm}^2$

$384\,\text{cm}^2 \quad 100\%$

$162{,}61\,\text{cm}^2 \quad x\% \qquad x = \frac{162{,}61 \cdot 100}{384} = 42{,}35\%$

Die Kegeloberfläche ist um 100%-42,35%=57,65% kleiner als die Würfeloberfläche

4.1



4.2

$$V = V_{\text{Oberer Kegel}} + V_{\text{Unterer Kegel}}$$

$$V_{\text{Oberer Kegel}} = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 5^2 \cdot \pi \cdot \left|\overline{DB}\right|$$

Berechnung von $\left|\overline{DB}\right|$: berechne zuerst $\left|\overline{AD}\right|$

$$\left|\overline{AD}\right|^2 + \left|\overline{DC}\right|^2 = \left|\overline{AC}\right|^2 \quad \Rightarrow \left|\overline{AD}\right|^2 = 6^2 - 5^2 = 11 \quad \Rightarrow \left|\overline{AD}\right| = 3{,}32\,\text{cm}$$

$$\Rightarrow \left|\overline{DB}\right| = 12 - 3{,}32 = 8{,}68\,\text{cm}$$

$$\Rightarrow V_{\text{Oberer Kegel}} = \frac{1}{3} \cdot 5^2 \cdot \pi \cdot 8{,}68 = 227{,}24\,\text{cm}^3$$

$$\Rightarrow V_{\text{Unterer Kegel}} = \frac{1}{3} \cdot 5^2 \cdot \pi \cdot 3{,}32 = 86{,}92\,\text{cm}^3$$

$$\Rightarrow V = 227{,}24 + 86{,}92 = 314{,}16\,\text{cm}^3$$

Oberfläche des Rotationskörpers=Mantelfläche$_{\text{Oberer Kegel}}$ + Mantelfläche$_{\text{Unterer Kegel}}$

$$\text{Mantelfläche}_{\text{Oberer Kegel}} = r \cdot \pi \cdot m = \left|\overline{DC}\right| \cdot \pi \cdot \left|\overline{BC}\right|$$

Berechnung von $\left|\overline{BC}\right|$: $\left|\overline{BC}\right|^2 = \left|\overline{DC}\right|^2 + \left|\overline{DB}\right|^2 = 5^2 + 8{,}68^2 = 100{,}34 \quad \Rightarrow \left|\overline{BC}\right| = 10{,}02\,\text{cm}$

$$\Rightarrow \text{Mantelfläche}_{\text{Oberer Kegel}} = 5 \cdot \pi \cdot 10{,}02 = 157{,}35\,\text{cm}^2$$

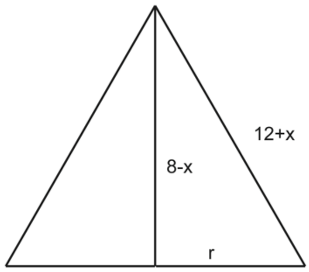
$$\text{Mantelfläche}_{\text{Unterer Kegel}} = r \cdot \pi \cdot m = \left|\overline{DC}\right| \cdot \pi \cdot \left|\overline{AC}\right| = 5 \cdot \pi \cdot 6 = 94{,}25\,\text{cm}^2$$

$$\Rightarrow O_{\text{Rotationskörper}} = 157{,}35 + 94{,}25 = 251{,}6\,\text{cm}^2$$

5

$$V_1 = V_{Zylinder} + V_{Kegel1} - V_{Kegel2}$$
$$V_{Zylinder} = 20^2 \cdot \pi \cdot 120 = 150796{,}45\,mm^3$$
$$V_{Kegel1} = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 40^2 \cdot \pi \cdot 40 = 67020{,}64\,mm^3$$
$$V_{Kegel2} = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 20^2 \cdot \pi \cdot 20 = 8377{,}58\,mm^3$$
$$V_1 = 150796{,}45 + 67020{,}64 - 8377{,}58 = 209439{,}51\,mm^3$$
$$\Rightarrow V_{Körper} = 50^2 \cdot \pi \cdot 140 - 209439{,}51 = 890117{,}92\,mm^3$$

6.1 Berechnung des Radius des Grundkreises:



$$r^2 + h^2 = m^2 \qquad \Rightarrow r^2 = m^2 - h^2 = (12+x)^2 - (8-x)^2$$
$$V(x) = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \left[(12+x)^2 - (8-x)^2\right] \cdot \pi \cdot (8-x) =$$
$$\frac{1}{3} \cdot \left[\left(144 + 24x + x^2\right) - (64 - 16x + x^2)\right] \cdot \pi \cdot (8-x) =$$
$$\frac{1}{3} \cdot \left[80 + 40x\right] \cdot \pi \cdot (8-x) = \frac{40}{3}\pi(2+x)(8-x) = \frac{40}{3}\pi(16 + 6x - x^2)$$

6.2

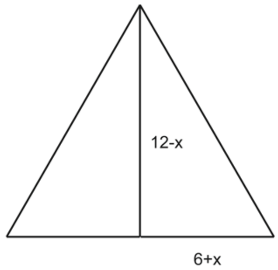
Bestimmung des Scheitelpunktes: $x_s = -\frac{b}{2a} \quad \Rightarrow x_s = -\frac{6}{-2} = 3$

Für x=3 erhält man den Kegel mit dem größten Volumen

6.3

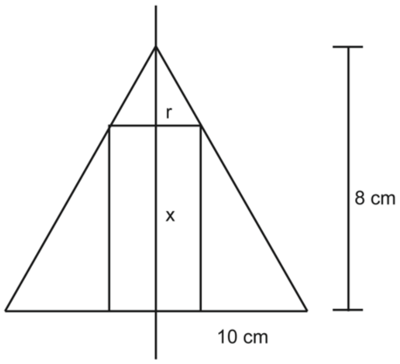
$$V = \frac{40}{3}\pi(16 + 6 \cdot 3 - 3^2) = \frac{40}{3}\pi \cdot 25 = 1047{,}20\,cm^3$$
$$O = r^2\pi + r \cdot \pi \cdot m$$
$$r^2 = (12+3)^2 + (8-3)^2 = 15^2 + 5^2 = 200 \quad \Rightarrow r = 14{,}14\,cm \qquad m = 12 + 3 = 15\,cm$$
$$\Rightarrow O = 200 \cdot \pi + 14{,}14 \cdot \pi \cdot 15 = 1294{,}65\,cm^2$$

7



$$V(x)=\frac{1}{3}\cdot r^2\cdot\pi\cdot h=\frac{1}{3}\cdot(6+x)^2\cdot\pi\cdot(12-x)=\frac{1}{3}\cdot(36+12x+x^2)\cdot\pi\cdot(12-x)=$$
$$\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot(432+144x+12x^2-36x-12x^2-x^3)=\frac{\pi}{3}(432+108x-x^3)$$

8.1



Berechnung des Grundkreisradius r des Zylinders:

Vierstreckensatz: $\frac{r}{10}=\frac{8-x}{8}\quad\Rightarrow r=\frac{8-x}{8}\cdot 10=\frac{80-10x}{8}=10-\frac{5}{4}x$

8.2

$$M_{Zylinder}=2\pi\cdot r\cdot h=2\pi\cdot(10-\frac{5}{4}x)\cdot x=2\pi\cdot(10x-\frac{5}{4}x^2)$$

Bestimmung des Scheitels:

$$x_s=-\frac{b}{2a}\quad\Rightarrow x_s=-\frac{10}{2\cdot\left(-\frac{5}{4}\right)}=\frac{10}{\frac{10}{4}}=4$$

Für x = 4 erhält man den Zylinder mit der größten Mantelfläche.